**שאלה 1**

(13 נק') א. יהיו  עוצמות. הוכיחי שאם *אז*  *.*

(12 נק') ב. תני דוגמא לעוצמות **אינסופיות**  כך ש-  *(קטן-ממש)*

*אך* ***אינו*** *קטן-ממש מ-*  *.*

**הוכיחי** שהדוגמא שנתת אכן מקיימת את הנדרש.

**שאלה 2**

תהי k עוצמה כלשהי, ייתכן אינסופית .

(15 נק') א. הוכח בפירוט, בעזרת הגדרת כפל עוצמות והגדרת חיבור עוצמות,

את השוויון .

ההוכחה בסעיף זה אמורה להתחיל כך: "תהי A קבוצה שעוצמתה k ...".

בסעיף זה אין להסתמך על משפט 5.17 שבחוברת "פרק 5 בתורת הקבוצות".

(10 נק') ב. חזור והוכח את השוויון  , הפעם בעזרת משפט 5.17,

באופן "אלגברי" ככל האפשר. נמק היטב כל מעבר.

**שאלה 3**

***N*** היא קבוצת המספרים הטבעיים.

***R*** היא קבוצת המספרים הממשיים, שעוצמתה C.

תהי A קבוצת כל הפונקציות של ***N*** לקבוצה  .

תהי B קבוצת כל הפונקציות של  לקבוצה .

לכל אחת מהקבוצות A,B קבעי אם עוצמתה היא:

 / C /  / יותר מ-  / עוצמה אחרת

הוכיחי בפירוט, נמקי כל מעבר. אפשר להסתמך על ממ"ן 14.

### שאלה 4

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (13 נק') | א. | האם ניתן לסדר את קבוצת המספרים הטבעיים, ***N***, בסדר-מלא שבו אין איבר ראשון ואין איבר אחרון? הוכח. |
|  |  |  |
| (12 נק') | ב. | סדר-מלא, S , על קבוצה A נקרא **צפוף** אם בין כל שני איברים יש עוד איבר. במלים אחרות, הסדר הוא צפוף אם לכל , אם  ו-  אז קיים  השונה מ- a ומ- b , והמקיים  ו- .  האם ניתן לסדר את קבוצת המספרים הטבעיים, ***N***, בסדר-מלא צפוף? הוכח. |

### הדרכה לשני הסעיפים: מושג העצמה יכול לסייע.

**שאלה 5**

***N*** היא קבוצת המספרים הטבעיים.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (9 נק') | א. | *תהי* K קבוצת כל התת-קבוצות הסופיות של ***N*** *:*  A היא קבוצה סופית*.* הוכח כי K היא בת-מניה. |
|  |  |  |
| (8 נק') | ב. | בהנתן , נאמר ש- A **קוֹ-סופית** (co-finite) ב- ***N*** *,*  אם  (המשלימה של A ב- ***N*** *)* היא קבוצה סופית*.*  *תהי* L קבוצת כל התת-קבוצות הקוֹ-סופיות ב- ***N*** *:*  A קוֹ-סופית ב- ***N*** *.* הוכח כי L היא בת-מניה. |
|  |  |  |
| (8 נק') | ג. | *תהי* M קבוצת כל התת-קבוצות של ***N*** אשר הן ומשלימותיהן אינסופיות:  A *ו-* שתיהן אינסופיות *.* האם M היא בת-מניה? |

**שאלה 6**

שאלה זו עוסקת בטענה הבאה:

קיימת חלוקה של קבוצת המספרים הטבעיים, ***N***, ל- 0א קבוצות זרות שכולן אינסופיות.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (13 נק') | א. | הוכח את הטענה הנ"ל בעזרת השוויון הידוע .  נסח את הוכחתך באופן מפורט ומדויק. אין צורך להוכיח כי . |
|  |  |  |
| (12 נק') | ב. | מצא (תאר במפורש) חלוקה של קבוצת המספרים הטבעיים ל- 0א קבוצות זרות שכולן אינסופיות.  דרך אפשרית אחת היא להיעזר במספרים ראשוניים. יש גם דרכים אחרות. |

**שאלה 7**

לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבע האם עצמתה היא:

סופית /  / *c* / גדולה מ- *c* / לא ניתן לקבוע.

**נמק בקיצור**.

1. קבוצת כל המשולשים במישור.
2. 

(כאשר: **Z**: קבוצת המספרים השלמים, **N**: קבוצת המספרים הטבעיים).

1. קבוצת המשבצות בלוח שחמט אינסופי המכסה את כל המישור.
2. קבוצת כל הרלציות על קבוצת המספרים הממשיים.
3. קבוצת כל **הסדרות הסופיות** של מספרים טבעיים.

### שאלה 8

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (11 נק') | א. | כידוע, קבוצת המספרים הרציונליים, ***Q*** , סדורה בסדר-מלא ע"י  .  בסידור זה, לאף איבר אין איבר המכַסֵה אותו.  (הגדרת "מכַסֵה": "תורת הקבוצות" עמ' 88 הגדרה 3.6)  האם ניתן לסדר את ***Q*** בסדר-מלא אחר, כך שלכל איבר יהיה איבר אחד ויחיד המכסה אותו? נמק בפירוט. |
|  |  |  |
| (11 נק') | ב. | תהי A קבוצה סדורה בסדר-מלא R. בנה בעזרת R סדר-מלא על הקבוצה : קבוצת כל התת-קבוצות **הסופיות** של A. הוכח בפירוט כי הרלציה שהגדרת היא אכן סדר-מלא. |
|  |  |  |
| (11 נק') | ג. | אם , מהי עוצמת ? הוכח. |